**第9讲 基本不等式**

**【知识点梳理】**

**1.基本不等式**

如果，那么，当且仅当时，等号成立．其中，叫作的算术平均数，叫作的几何平均数．即正数的算术平均数不小于它们的几何平均数．

**基本不等式1：**若，则，当且仅当时取等号；

**基本不等式2：**若，则（或），当且仅当时取等号.

**注意**（1）基本不等式的前提是“一正”“二定”“三相等”；其中“一正”指正数，“二定”指求最值时和或积为定值，“三相等”指满足等号成立的条件.（2）连续使用不等式要注意取得一致.

**【方法技巧与总结】**

**1.几个重要的不等式**

（1）

（2）基本不等式：如果，则(当且仅当“”时取“”).

特例：（同号）.

（3）其他变形：

①(沟通两和与两平方和的不等关系式)

②(沟通两积与两平方和的不等关系式)

③(沟通两积与两和的不等关系式)

④重要不等式串：即

调和平均值几何平均值算数平均值平方平均值(注意等号成立的条件).

**2.均值定理**

已知.

（1）如果(定值)，则(当且仅当“”时取“=”).即“和为定值，积有最大值”.

（2）如果(定值)，则(当且仅当“”时取“=”).即积为定值，和有最小值”.

**3.常见求最值模型**

模型一：，当且仅当时等号成立；

模型二：，当且仅当时等号成立；

模型三：，当且仅当时等号成立；

模型四：，当且仅当时等号成立.

**【典型例题】**

**题型一 直接利用基本不等式求最值**

**【例1】**（2021·湖南邵阳市）若正实数满足.则的最大值为（ ）

A． B． C． D．

**【例2】**（2021·六安市裕安区新安中学）已知，则的最大值为（ ）

A． B． C． D．

【题型专练】

1.（2022·甘肃酒泉·模拟预测（理））若*x*，*y*为实数，且，则的最小值为（       ）

A．18 B．27 C．54 D．90

2.（2022·河南河南·三模（理））已知二次函数（）的值域为，则的最小值为（       ）

A． B．4 C．8 D．

**题型二 “1”的代换，乘1法**

1的代换就是指凑出1，使不等式通过变形出来后达到运用基本不等式的条件，即积为定值，凑的过程中要特别注意等价变形．

**【例1】**（2021·上海市大同中学）设为正数，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_.

**【例2】**（2021·河北石家庄市）已知，且，则的最小值是（ ）

A．4 B．5 C．6 D．9

**【例3】**（2021·北京师范大学万宁附属中学）已知，，则的最小值为（ ）

A． B． C． D．

**【例4】**（2021·浙江高一期末），，且，不等式恒成立，则的范围为\_\_\_\_\_\_\_.

**【例5】**（2021·浙江）当时，不等式恒成立，则实数的最大值为（ ）

A． B． C． D．

**【例6】**若学优高考网(www.gkstk.com),国内最领先的高考网站,每天发布最有价值的高考资料,累计帮助千万考生获得成功!， 学优高考网(www.gkstk.com),国内最领先的高考网站,每天发布最有价值的高考资料,累计帮助千万考生获得成功!，则学优高考网(www.gkstk.com),国内最领先的高考网站,每天发布最有价值的高考资料,累计帮助千万考生获得成功!的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**【例7】**若是正实数，且，则的最小值为　 　．

**【例8】**设，，则的最小值是 ．

【题型专练】

1.（2022·辽宁·模拟预测）已知正实数*x*，*y*满足，则的最小值为（       ）

A．2 B．4 C．8 D．12

2.（2022·安徽·南陵中学模拟预测（理））若实数*，*满足，则的最小值为（       ）

A． B． C． D．

3.（2022·四川·石室中学三模（文））已知，且，则的最小值是(       )

A．49 B．50 C．51 D．52

4.（2022·河南·宝丰县第一高级中学模拟预测（文））已知正数*a*，*b*满足，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

5.（2022·天津·南开中学模拟预测）设，，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_．

6．（2022·重庆·三模）已知，，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**题型三 常规凑配法**

**【例1】**（2021·云南文山壮族苗族自治州）已知，函数的最小值为（ ）

A．4 B．7 C．2 D．8

**【例2】**（2021·安徽省泗县第一中学）函数的最小值为（ ）

A． B． C． D．

**【例3】**若对任意，恒成立,则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**【例4】**设，则的最小值是

（*A*）2 （*B*）4 （*C*）  （*D*）5

**【例5】**（2022·全国·高三专题练习（理））若 ，则有（       ）

A．最大值 B．最小值 C．最大值 D．最小值

【题型专练】

1.（2022·全国·高三专题练习）函数的最小值是（       ）

A． B．

C． D．

2.（2022·全国·高三专题练习）若，且，则的最小值为（       ）

A．3 B． C． D．

3.（2022·上海·高三专题练习）若，则函数的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**题型四 换元法**

**【例1】**（2021·永丰县永丰中学高一期末）函数（）的最小值为（ ）

A． B． C． D．

**【例2】**（2021·全国高一课时练习）函数的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**题型五 消参法**

消参法就是对应不等式中的两元问题，用一个参数表示另一个参数，再利用基本不等式进行求解.解题过程中要注意“一正，二定，三相等”这三个条件缺一不可！

**【例1】**已知，则的最小值是 ．

**【例2】**若实数，满足，则的最小值为　 　．

**【题型专练】**

1.（2022·浙江绍兴·模拟预测）若直线过点，则的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

2.（2022·全国·高三专题练习）设正实数，，满足，则当取得最大值时，的最大值为（       ）

A． B． C． D．

3.（2022·全国·高三专题练习（理））已知正实数*a*，*b*满足，则的最小值是（　　）

A．2 B． C． D．6

**题型六 双换元**

若题目中含是求两个分式的最值问题，对于这类问题最常用的方法就是双换元，分布运用两个分式的分母为两个参数，转化为这两个参数的不等关系．

**【例1】**若，且，则的最小值为 ．

**【例2】**已知，求的最大值.

**【例3】**（2022·浙江省江山中学高三）设，，若，则的最大值为（       ）

A． B． C． D．

【题型专练】

1.（2022·天津南开·一模）若，，，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_．

2.（2022·全国·高三专题练习）已知，，，则取到最小值为 \_\_\_\_\_\_\_\_．

3.（2022·全国·高三专题练习）若，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_

4.（2022·全国·高三专题练习）若正实数，满足，则的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**题型七 齐次化**

齐次化就是含有多元的问题，通过分子、分母同时除以得到一个整体，然后转化为运用基本不等式进行求解．

**【例1】**已知，，，则的最小值为　 　．

**【例2】**（2022·全国·高三专题练习（理））若*a*，*b*，*c*均为正实数，则的最大值为（       ）

A． B． C． D．

【题型专练】

1.（2022·全国·高三专题练习）已知三次函数在上单调递增，则最小值为（       ）

A． B． C． D．

2.（2022·天津·高三专题练习）已知，，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

3.（2022·浙江·高三专题练习）已知*x*，*y*，*z*为正实数，且，则的最大值为\_\_\_\_\_\_．

4．已知，，，则的最小值为（ ）

A． B． C． D．

**题型八 和、积、平方和的转化**

若出现， 其中、、、、

因为，可以转化为或，

从而求出及的取值范围．若出现求取值范围，先将式子因式分解成为形式，再用基本不等式求出最值．

**【例1】**（2022重庆月考）设，，，则　　

A．有最大值8 B．有最小值8 C．有最大值8 D．有最小值8

**【例2】**设求最小值．

**【例3】**设为实数，若，则的最大值是 ．

【题型专练】

1．（2022·河北保定·二模）已知*a*，，且，则的最大值为（       ）

A．2 B．3 C． D．

2.（2022·浙江·模拟预测）已知正实数*x*，*y*满足：，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**题型九 多选题**

**【例1】**（2022·河北张家口·三模）已知，（*m*是常数），则下列结论正确的是（       ）

A．若的最小值为，则

B．若的最大值为4，则

C．若的最大值为*m*，则

D．若，则的最小值为2

**【例2】**（2022·河北·模拟预测）已知，则以下不等式成立的是（       ）

A． B． C． D．

**【例3】**（2022·山东菏泽·二模）设*a*，*b*为两个正数，定义*a*，*b*的算术平均数为，几何平均数为．上个世纪五十年代，美国数学家D．H. Lehmer提出了“Lehmer均值”，即，其中*p*为有理数．下列结论正确的是（       ）

A． B．

C． D．

**【例4】**对任意*x*，*y*，，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【题型专练】

1.（2022·江苏·扬州中学高三开学考试（多选题））设，，下列结论中正确的是（       ）

A． B．

C． D．

2．（多选题）设，且，那么（ ）

A．有最小值 B．有最大值

C．有最大值 D．有最小值

